**CONCOURS D'ACCÈS AUX EMPLOIS DE PROFESSEUR DE LYCÉE PROFESSIONNEL AGRICOLE ET 4e CATÉGORIE DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE AGRICOLE PRIVÉ**

**PLPA**

**SESSION 2017**

Concours : **EXTERNE**
Section : **MATHÉMATIQUES – PHYSIQUE CHIMIE**

# ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N°2

## Étude de thème

Coefficient : 2 – Durée : 5 heures

*L'usage des calculatrices de poche est autorisé, à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.*

*Le sujet est constitué de deux exercices indépendants portant sur des thèmes abordés dans les référentiels de formation de mathématiques de l'enseignement agricole.*

*Il comporte huit pages y compris celle-ci, dont une page d'annexes.*

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

# Exercice 1

*Cet exercice est composé de cinq parties indépendantes.*

Le Limousin est une région agricole où beaucoup de parcelles ne sont pas mécanisables.
De ce fait, l'élevage bovin s'est fortement développé et constitue la première production devant l'élevage ovin. L'alimentation des bovins se fait à base d'herbe et de céréales.
Un nombre important d'agriculteurs a choisi de diversifier ses productions. Certains ont choisi pour cela l'agroforesterie, c'est-à-dire l'association sur une même parcelle d'arbres et de cultures.
On s'intéresse aux productions végétales et à l'alimentation des bovins dans une exploitation du Limousin.

## Partie A

Dans cette exploitation, la ration journalière des vaches allaitantes est composée d'une base de foin et d'un complément constitué d'orge et de tournesol afin de combler les déficits en énergie et en azote.

Les apports de l'orge et du tournesol utilisés sont donnés dans le tableau suivant.

| | Orge | Tournesol |
|---|---|---|
| Apport en énergie en unités fourragères par kilogramme (UF par kg) | 1,09 | 0,64 |
| Apport en azote en protéines digestibles dans l'intestin par kilogramme (PDI par kg) | 90 | 250 |

À partir des données alimentaires de l'orge et du tournesol, l'agriculteur doit équilibrer sa ration de manière à combler exactement les deux déficits.

Pour le foin de l'exploitation, le déficit en énergie est de 2,32 UF et le déficit en azote de 369 PDI.

1. On note $x$ la masse d'orge en kg et $y$ la masse de tournesol en kg nécessaires pour équilibrer la ration.
   Déterminer le système qui doit être vérifié par $x$ et $y$ pour que la ration soit équilibrée.

2. Résoudre le système et en déduire les quantités d'orge et de tournesol nécessaires pour obtenir une ration équilibrée.

3. Proposer et décrire une méthode utilisant les TICE afin de résoudre ce système en classe de Seconde professionnelle (cf **Annexe 1**).

## Partie B

L'exploitation produit une partie de ses céréales. Elle compte 130 hectares d'herbe et 20 hectares de céréales. Pour être davantage autonome, l'agriculteur décide d'augmenter progressivement sa surface en céréales au détriment de sa surface en herbe, tout en conservant la même surface totale, en utilisant la rotation suivante.

Il a décidé que désormais, chaque année :
- un sixième de sa surface en herbe sera ensemencée en céréales, le reste demeurant en herbe ;
- la moitié de sa surface en céréales sera de nouveau ensemencée en céréales, le reste étant ensemencé en herbe.

Pour tout entier naturel $n$, on note $a_n$ la surface en herbe et $b_n$ la surface en céréales de

l'exploitation au bout de $n$ années, de sorte que $a_0 = 130$ et $b_0 = 20$.

1. Pour tout entier naturel $n$, exprimer $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ en fonction de $a_n$ et $b_n$.

2. On souhaite étudier ce problème en classe de Baccalauréat technologique STAV.

   Concevoir une activité avec TICE permettant à un élève de Baccalauréat technologique STAV de calculer les termes des suites $(a_n)$ et $(b_n)$.

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel $n$, on a $b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + 25$.

   b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, on a $b_n = 37{,}5 - \frac{17{,}5}{3^n}$.

   c. Montrer que la suite $(b_n)$ converge puis calculer sa limite et en déduire la limite de la suite $(a_n)$.

4. Pour tout entier naturel $n$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. On pose également $M = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   On a ainsi $X_0 = \begin{pmatrix} 130 \\ 20 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel $n$, $X_{n+1} = M X_n$.

   On définit les matrices $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Vérifier par un calcul que la matrice inverse de $P$ est $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

   b. Démontrer que $M = P D P^{-1}$.

   c. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, on a $X_n = P D^n P^{-1} X_0$.

   d. Donner l'expression de $D^n$.

   e. Exprimer chaque composante de $X_n$ en fonction de $n$.

   f. En déduire une valeur approchée à $10^{-1}$ près de la surface en céréales au bout de 10 ans.

## Partie C

On s'intéresse maintenant aux maladies qui peuvent toucher les cultures d'orge. L'une d'elles, la rhynchosporiose, est particulièrement grave et provoque des pertes de rendement de l'ordre de 30%.

On estime qu'elle survient une année sur cinq, soit avec une probabilité de 0,2.

Par souci de durabilité, l'agriculteur ne souhaite pas faire de traitement préventif systématique contre la rhynchosporiose. Il fait appel à un technicien dont il suit toujours l'avis. Celui-ci conseille

de traiter une année sur quatre. Lorsqu'on traite, la rhynchosporiose survient avec une probabilité de 0,7, mais dans ce cas, grâce au traitement, elle ne se développe pas de sorte que l'agriculteur ne subit pas de perte de rendement.

On considère les événements :

- $T$ : « le technicien conseille de traiter » ;
- $R$ : « la rhynchosporiose survient ».

1. Proposer un mode de représentation visant à présenter la situation à des élèves de Terminale.

2. On suppose que la rhynchosporiose ne survient pas. Calculer la probabilité que l'agriculteur ait réalisé le traitement inutilement.

3. Déterminer la probabilité que l'agriculteur ait réalisé un traitement et que la maladie survienne. En déduire que la probabilité que la maladie se produise sachant qu'il n'a pas réalisé de traitement vaut 1/30.

4. Le rendement moyen de l'orge est de 50 quintaux par hectare en Limousin. Le cours moyen de l'orge est de 20 euros par quintal.
   La rynchosporiose occasionne des pertes de rendement de 30%. Le coût de réalisation de son traitement fongicide est de 60 euros par hectare.
   Face à la rynchosporiose, l'agriculteur a en fait trois solutions :
   - aucun traitement : l'agriculteur subit alors une perte à chaque fois que la rynchosporiose survient ;
   - un traitement systématique : l'agriculteur réalise le traitement tous les ans et ne subit alors jamais de perte à cause de la rynchosporiose ;
   - un traitement raisonné : l'agriculteur ne réalise le traitement que lorsque le technicien l'a conseillé et ne subit une perte à cause de la rynchosporiose que lorsqu'elle survient et que le technicien n'a pas conseillé de traiter.

   Le choix de l'agriculteur de suivre les conseils du technicien est-il le meilleur du point de vue économique ?

## Partie D

Un enseignant a proposé l'exercice suivant à ses élèves de Baccalauréat technologique STAV dans une épreuve de baccalauréat blanc (cf **Annexe2**).

Un agriculteur cultive de l'orge pour nourrir ses animaux.
Une maladie touche les cultures d'orge avec une probabilité égale à 0,2.
L'agriculteur compte qu'il lui reste 20 ans à travailler avant de prendre sa retraite.
On considère la variable aléatoire $X$ qui compte le nombre d'années où ses cultures d'orge vont être atteintes par cette maladie.

1. Justifier la loi de probabilité de $X$.
2. Soit $k$ entre 0 et 20. Donner $P(X = k)$.
3. Calculer la probabilité que les cultures d'orge de l'agriculteur soient atteintes par la maladie exactement trois fois au cours de ces 20 années.
4. Calculer la probabilité que les cultures d'orge de l'agriculteur soient atteintes par la maladie moins de quatre fois au cours de ces 20 années.
5. Calculer la probabilité que les cultures d'orge de l'agriculteur soient atteintes par la maladie plus de cinq fois au cours de ces 20 années.

Un élève de Terminale de Baccalauréat technologique STAV a rédigé ainsi ses réponses à l'exercice.

1. L'agriculteur doit encore travailler 20 années dont 0,2 où ses cultures d'orge vont être atteintes par la maladie. La loi de $X$ est la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,2$.

2. Pour tout $k$ entre 0 et 20, on a $P(X = k) = \binom{20}{k} \times 0,2^k \times 0,8^{20-k}$.

3. Avec la calculatrice, on a $P(X = 3) \approx 0,2054$.

   La probabilité que les cultures d'orge de l'agriculteur soient atteintes par la maladie exactement trois fois au cours de ces 20 années est environ 0,2054.

4. Avec la calculatrice, on a $P(X < 4) \approx 0,6296$.

   La probabilité que les cultures d'orge de l'agriculteur soient atteintes par la maladie moins de quatre fois au cours de ces 20 années est environ 0,6296.

5. $P(X > 5) = 1 - P(X < 5)$

   Avec la calculatrice, on a $P(X < 5) \approx 0,8042$.

   Ainsi, $P(X > 5) \approx 1 - 0,8042$, soit $P(X > 5) \approx 0.1958$.

   La probabilité que les cultures d'orge de l'agriculteur soient atteintes par la maladie plus de cinq fois au cours de ces 20 années est environ 0,1958.

1. Faire une analyse critique de l'énoncé de cet exercice en proposant des améliorations.

2. Faire une analyse critique de la solution rédigée par l'élève en indiquant les erreurs ou imprécisions et en proposant des améliorations.

## Partie E

Pour diversifier ses revenus, l'agriculteur a acquis une parcelle de sept hectares qu'il souhaite planter en jeunes noyers, associés en agroforesterie avec une culture de céréales à paille.

L'agriculteur a planté 100 noyers qu'il va greffer. Pour chacun d'eux, si la greffe n'a pas pris, il recommence une nouvelle greffe l'année suivante. Si au bout de $n$ années la greffe n'a pas pris, l'agriculteur arrache le noyer.

La probabilité qu'une greffe prenne est 0,8. On suppose que toutes les greffes sont indépendantes.

Soit $n$ un entier naturel non nul. On considère la variable aléatoire $X_n$ égale au nombre de noyers pour lesquels la greffe a pris au cours des $n$ premières années.

1. Déterminer la probabilité que la greffe d'un noyer n'ait pas pris au bout de $n$ années.

2. En déduire la probabilité que la greffe d'un noyer ait pris au cours des $n$ premières années.

3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X_n$.

4. Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 100) = 1$ et que si $0 \leq k < 100$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = k) = 0$.

5. Combien d'années faut-il pour que la probabilité que toutes les greffes aient prises soit supérieure à 0,95 ?

## Exercice 2

*Cet exercice est composé de quatre parties indépendantes.*

On injecte un antibiotique à un animal par voie intraveineuse.
On admet que la diffusion de l'antibiotique est très rapide et que juste après son injection sa concentration est alors de 1,5 mg/L de sang.

### Partie A

On admet que la concentration de cet antibiotique dans le sang diminue de 2,85% toutes les heures.
La demi-vie d'un antibiotique est le temps au bout duquel la moitié de sa quantité initiale a disparu. Sa concentration dans le sang est alors la moitié de sa concentration initiale.

1. Écrire en langage naturel un algorithme permettant à un élève de Baccalauréat technologique STAV de déterminer la demi-vie.

2. Pour tout entier naturel $n$, on note $u_n$ la concentration d'antibiotique dans le sang au bout de $n$ heures.

   a. Donner $u_0$ et l'expression de $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.

   b. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

   c. Déterminer par le calcul la valeur de la demi-vie à l'heure près.

### Partie B

On considère la fonction $c$ qui modélise la concentration d'antibiotique résiduelle dans le sang au bout de $t$ heures. L'élimination de l'antibiotique est proportionnelle à sa concentration, donc $c$ est solution sur l'intervalle $[0;+\infty[$ d'une équation différentielle du type $y' = -k\,y$ avec $k > 0$.

1. Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' = -k\,y$ qui vérifie $y(0) = 1.5$.

2. On souhaite déterminer la valeur de $k$.

   On effectue des prises de sang sur l'animal afin de doser la concentration en antibiotique.
   Les données sont les suivantes :

| Temps $t_i$ en heures | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Concentration résiduelle $c_i$ en mg/L | 1,5 | 1,3 | 1,12 | 0,97 | 0,84 | 0,73 | 0,63 |

   On suppose connues les propriétés des fonctions logarithme népérien et exponentielle étudiées au lycée.

   a. On considère le changement de variable $z = \ln c$.
   Déterminer l'ajustement affine entre $z$ et $t$ puis une expression de $c$ en fonction de $t$.

   b. En utilisant cette méthode, donner à l'aide de la calculatrice une valeur de $k$ arrondie à $10^{-1}$ près.

## Partie C

On considère maintenant que la fonction $c$ est définie sur $[0;+\infty[$ par $c(t)=1{,}5\mathrm{e}^{-0{,}029t}$.

1. Proposer deux méthodes permettant à un élève de déterminer la demi-vie de l'antibiotique à l'heure près.

2. Rédiger une de ces méthodes, telles que vous l'attendez d'un élève de baccalauréat professionnel, puis donner ce temps en heures et minutes, arrondi à la minute la plus proche.

Le laboratoire indique sur la notice que la demi-vie de l'antibiotique est de 24 heures et que la concentration moyenne d'antibiotique dans le sang de l'animal pendant ces 24 heures doit être d'au moins 1 mg/L pour que son pouvoir bactéricide soit assuré.

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction $f$ sur un intervalle $[a;b]$ est $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

3. Le pouvoir bactéricide de l'antibiotique est-il bien assuré ? Justifier la réponse par un calcul.

## Partie D

Cet antibiotique peut également être administré par voie intramusculaire. C'est le cas lorsque c'est l'agriculteur qui s'en charge.
Dans ce cas, la diffusion de l'antibiotique dans le sang est beaucoup plus lente et son pouvoir bactéricide n'est pas immédiat.
Des études en laboratoire ont permis de montrer qu'avec une dose habituelle de cet antibiotique administrée par voie intramusculaire, le pourcentage de bactéries par rapport au moment de l'injection se modélise par la fonction $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par :

$f(x)=(240x+100)\mathrm{e}^{-1{,}5x}$, où $x$ représente le temps en jours écoulé depuis l'injection.

On considère que les bactéries sont éliminées quand leur quantité est inférieure à 0,01% de leur quantité initiale.

1. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

2. Étudier les variations de $f$ et construire son tableau de variations.

3. Justifier que $f$ prend deux fois la valeur 100 sur $[0;+\infty[$ et qu'elle prend une seule fois la valeur 0,01 sur $[0;+\infty[$.

4. En utilisant la calculatrice, déterminer le temps, en jours, heures et minutes, au bout duquel les bactéries sont totalement éliminées.

## Annexe 1

*Extrait du document d'accompagnement du module EG4 (Culture scientifique et technologique) de Seconde professionnelle.*

**Résoudre un problème du premier degré issu de situations concrètes.**
L'objectif est d'étudier et de résoudre des problèmes issus de situations concrètes en mettant en œuvre les compétences de prise d'information, de mise en équation, de traitement mathématique, de contrôle et de communication des résultats. Les exemples étudiés conduisent à des équations ou inéquations du premier degré à une inconnue ou à des systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues.
Il convient d'exploiter conjointement les aspects numériques, algébriques et graphiques. On évite de multiplier les virtuosités techniques inutiles.
On favorise également diverses situations pour lesquelles la résolution algébrique n'est pas la seule solution (résolution par tâtonnement, dichotomie, avec ou sans TICE, recours à la proportionnalité, solution évidente, ...)

## Annexe 2

*Extrait du document d'accompagnement du module M4 (Mathématiques et technologies de l'informatique et du multimédia) de Baccalauréat technologique STAV.*

**Reconnaître des situations relevant de la loi binomiale et calculer, dans ce cadre, des probabilités.**
Une expérience à deux issues, succès ou échec, est appelée « épreuve de Bernoulli ». On parle de « schéma de Bernoulli » lorsqu'on effectue une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
Par définition, la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$, notée $B(n, p)$ , est la loi de la variable $X$ qui donne le nombre de succès dans la répétition de $n$ épreuves de Bernoulli où la probabilité d'un succès est $p$.
La représentation à l'aide d'un arbre est privilégiée. On peut ainsi faciliter la découverte de la loi binomiale pour des petites valeurs de $n$ ($n \leq 4$).
On admet les résultats $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.